

Aus dieser Formel geht hervor, dass die **Größe der Wärmespannung** von der Länge und dem Querschnitt des Stabes unabhängig und nur durch das **Material** und die **Temperaturerhöhung** bedingt ist. Die auftretende Wärmespannung darf die Streckgrenze nicht überschreiten, sonst tritt eine bleibende Verformung ein.

BEISPIEL 3

Welche Spannung entsteht in einem fest eingespannten Werkstück aus Stahl ($E=210\,000\text{ N/mm}^2$, $\alpha_1=0,000\,012\text{ K}^{-1}$) bei einer Erwärmung von 20°C auf 100°C ?

$$\begin{aligned}\sigma &= E \cdot \alpha_1 \cdot \Delta T = \\ &= 210\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 0,000\,012 \frac{1}{\text{K}} \cdot 80\text{K} = \\ &= 202 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\end{aligned}$$

AUFGABEN

- ⑦ Ein Stahlplättchen mit $20\text{ mm} \cdot 20\text{ mm}$ Querschnitt und 6 mm Dicke (Abb. 7) kann nach Abkühlung auf die Temperatur $\vartheta_1 = -30^\circ\text{C}$ eben in die Nut einer Grundplatte mit der Umgebungstemperatur $\vartheta_2 = +20^\circ\text{C}$ eingeführt werden. Wie groß ist die Dickenzunahme des nicht eingespannten Plättchens bei Erwärmung von -30°C auf $+20^\circ\text{C}$? Das Plättchen wird jetzt bei -30°C in die Nut geschoben. Welche Spannung entsteht in dem Plättchen, und mit welcher Normalkraft wird es in der 10 mm tiefen Nut eingespannt?

($\alpha_1=0,000\,012\text{ K}^{-1}$, $E=210\,000\text{ N/mm}^2$)

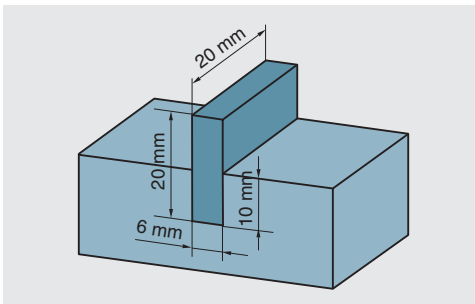


Abb. 7

- ⑧ Welche Temperaturdifferenz kann ein eingespannter Stab aus Aluminium aushalten, wenn seine höchstzulässige Spannung $\sigma_{\text{zul}}=90\text{ N/mm}^2$, sein Elastizitätsmodul $74\,000\text{ N/mm}^2$ und sein Längenausdehnungskoeffizient $0,000\,024\text{ K}^{-1}$ betragen?

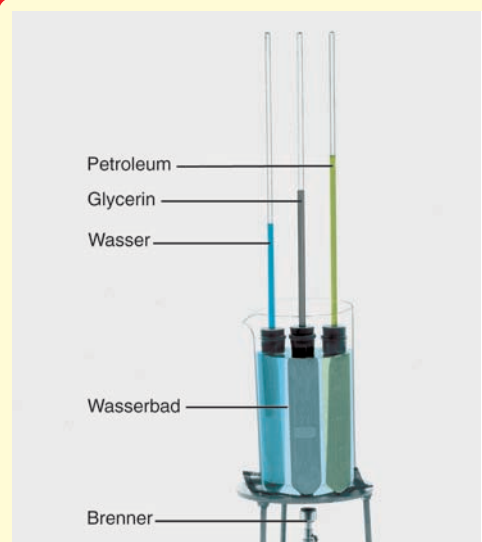
5.2.2 Ausdehnung der Flüssigkeiten**VERSUCH 1**

Abb. 1 Wärmeausdehnung von Flüssigkeiten

Drei gleiche Reagenzgläser, die ganz mit Wasser, Glycerin und Petroleum gefüllt sind, werden oben mit je einem Stopfen verschlossen, durch deren Bohrungen drei gleiche Kapillarröhrchen gesteckt werden. Sie werden in ein Wasserbad (Anfangstemperatur unter 10°C) gebracht und auf etwa 50°C erwärmt.

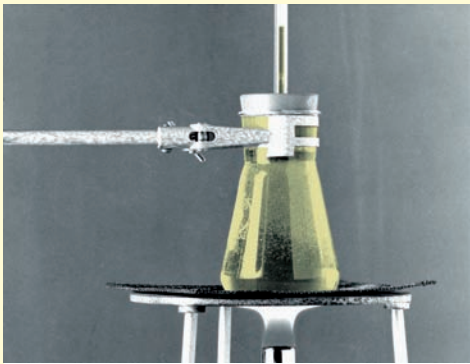
Schon bei geringer Erwärmung steigt das Petroleum und etwas weniger auch das Glycerin in der Kapillare hoch. Beim Wasser bleibt die Höhe des ansteigenden Flüssigkeitsfadens zuerst stark, später weniger hinter der des Glycerin- und Petroleumfadens zurück.

Ergebnis

Während die Wärmeausdehnung von festen Stoffen kleiner Abmessungen ohne Messgeräte kaum feststellbar ist, lässt sie sich bei Flüssigkeiten deutlich erkennen.

Auch Flüssigkeiten dehnen sich bei Erwärmung aus; ihre Ausdehnung ist größer als die von festen Stoffen.

Da Flüssigkeiten keine feste Form haben, kann man bei ihnen nur Volumenausdehnungskoeffizienten bestimmen; dazu wiederholen wir den Versuch aus Abschnitt 5.1.2 mit genauen Messungen.

VERSUCH 2

Abb. 2 Messung des Volumenausdehnungskoeffizienten von Petroleum

Wir bestimmen die Masse $m_1 = 41,4\text{ g}$ eines leeren und $m_2 = 185,6\text{ g}$ des dann mit Wasser gefüllten Kolbens. Die Kapillare wiegt leer $m_3 = 9,1\text{ g}$, mit Wasser gefüllt $m_4 = 15,1\text{ g}$, und hat eine Länge von 25 cm . Dann werden Kolben und Kapillare geleert und der Kolben ganz mit Petroleum gefüllt, sodass dieses zum Teil in die Kapillare eindringt. Wir lesen die Anfangstemperatur $\vartheta_1 = 14,8^\circ\text{C}$ ab und erwärmen den Kolben bis zur Endtemperatur $\vartheta_2 = 33,0^\circ\text{C}$. Dabei steigt der Petroleumfaden um $\Delta l = 10,6\text{ cm}$.

Auswertung

Wassermenge im Kolben

$$m_W = m_2 - m_1 = 144,2\text{ g}$$

Volumen des Kolbens

$$V_W = \frac{m_W}{\rho_W} = 144,2\text{ cm}^3$$

Wasser in der Kapillare

$$m_K = m_4 - m_3 = 6,0\text{ g}$$

Volumen der Kapillare

$$V_K = \frac{m_K}{\rho_W} = 6,0\text{ cm}^3$$

Volumenzunahme bei der Erwärmung

$$\Delta V = V_K \cdot \frac{\Delta l}{l} = 6\text{ cm}^3 = \frac{10,6\text{ cm}}{25\text{ cm}} = 2,54\text{ cm}^3$$

Vernachlässigt man die geringe Raumausdehnung des Glaskolbens, so erhält man:

Ergebnis

Volumenausdehnungskoeffizient des Petroleums:

$$\alpha_V = \frac{\Delta V}{V \cdot \Delta T} = \frac{2,54\text{ cm}^3}{144,2\text{ cm}^3 \cdot 18,2\text{ K}} = 0,00097 \frac{1}{\text{K}}$$

Bei anderen Flüssigkeiten ergeben sich aus ähnlichen Versuchen die Werte der folgenden Tabelle.

Tabelle 1:
Volumenausdehnungskoeffizienten einiger Flüssigkeiten in $1/\text{K}$

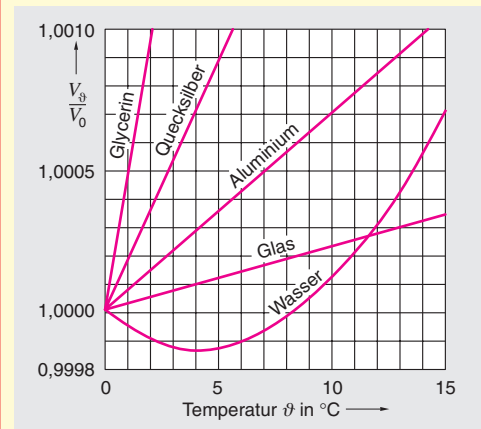
| | |
|---|---------|
| Ether | 0,00160 |
| Benzol | 0,00120 |
| Alkohol | 0,00110 |
| Petroleum | 0,00100 |
| Heizöl | 0,00086 |
| Glyzerin | 0,00050 |
| Quecksilber | 0,00018 |
| Wasser | |
| zwischen 20°C und 50°C | 0,00034 |
| zwischen 50°C und 100°C | 0,00062 |

Weil der Behälter einer eingeschlossenen Flüssigkeit sich auch ausdehnt, steigt der Flüssigkeitsspiegel nur mit der Differenz der Volumenausdehnung der Flüssigkeit und des Behälters.

Ergänzung zu Versuch 1

VERSUCH 1a
2. Ergebnis

Wasser dehnt sich bei Temperaturen unter 10°C viel weniger aus als andere Flüssigkeiten. Eine bis zum Gefrierpunkt geführte Messung zeigt sogar, dass Wasser bei 4°C das kleinste Volumen besitzt und sich ab dieser Temperatur sowohl beim Erwärmen wie auch beim Abkühlen ausdehnt (Abb. 3).


Abb. 3 Anomalie des Wassers

5.2.2 Ausdehnung der Flüssigkeiten

Diese Abweichung von der bei allen anderen Stoffen gültigen Regel bezeichnet man als die **Anomalie des Wassers**. Bei einer von 4 °C beginnenden Erwärmung ist die Ausdehnung zuerst noch gering und wächst mit zunehmender Temperatur. Der Raumausdehnungskoeffizient beträgt:

- bei 10 °C $0,00009 \text{ K}^{-1}$
- bei 20 °C $0,00020 \text{ K}^{-1}$
- bei 30 °C $0,00030 \text{ K}^{-1}$

Weil Wasser bei 4 °C sein kleinstes Volumen besitzt, ist bei dieser Temperatur die Dichte am größten.

Bei langsamer Abkühlung sinkt daher Wasser von 4 °C nach unten, während die kälteren Schichten und auch das noch leichtere Eis oben bleiben. Diese Erscheinung hat die bedeutsame Folge, dass im Winter Seen und langsam fließende Flüsse nur an der Oberfläche zufrieren, während in der Tiefe das Wasser mit der Temperatur 4 °C flüssig bleibt. Ohne diese Besonderheit wäre höheres organisches Leben im Wasser kaum möglich.

Die Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten bewirkt, dass warme Flüssigkeiten leichter sind als kalte. Auf dieser Tatsache beruht der folgende Versuch:

VERSUCH 3

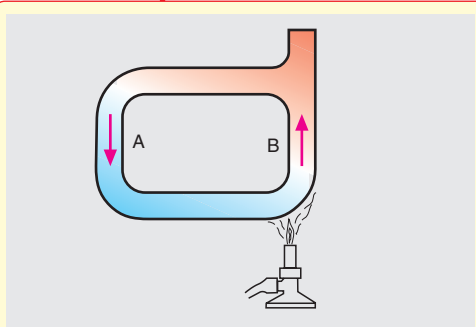


Abb. 4 Schema einer Warmwasserheizung

Eine in sich geschlossene Röhre wird auf der einen Seite erwärmt; in den übrigen Teilen kühlt sie sich in der Umgebung wieder ab. Das dichtere kalte Wasser im Schenkel A drückt das weniger dichte im Schenkel B nach oben, sodass sich das Wasser in der Röhre umzuwälzen beginnt.

AUFGABEN

- ① Eine Warmwasserheizung mit allen Bauteilen aus Stahl enthält bei 8 °C 400 dm^3 Wasser. Welchen Rauminhalt muss das Ausdehnungsgefäß dieser Heizung mindestens haben, damit auch bei einer Temperatur von 80 °C kein Wasser überläuft (mittlerer Volumenausdehnungskoeffizient im gegebenen Temperaturbereich für Wasser $\alpha_{VW}=0,0004 \text{ K}^{-1}$, für Stahl $\alpha_{VSt}=0,00004 \text{ K}^{-1}$)?
- ② Wie lang ist der Skalenteil für 1 °C bei einem Thermometer, dessen Quecksilbergefäß $0,6 \text{ cm}^3$ ($\alpha_{VQ}=0,00018 \text{ K}^{-1}$) enthält und das eine Kapillare von 0,4 mm Innendurchmesser besitzt ($\alpha_{VGl}=0,00025 \text{ K}^{-1}$)?
- ③ In Abschnitt 2.1.4 wurde ein Verfahren beschrieben, mit dessen Hilfe man aus den Flüssigkeitshöhen in einem U-Rohr das Verhältnis ihrer Dichten bestimmt. Wie kann man diese Methode nutzen, um den Volumenausdehnungskoeffizienten einer Flüssigkeit zu bestimmen?
- ④ Warum lässt sich auch oberhalb des Gefrierpunktes Wasser nicht als Thermometerflüssigkeit verwenden?
- ⑤ Bringt man ein Thermometer aus einer kälteren Umgebung in eine wärmere Flüssigkeit, so bemerkt man anfangs ganz kurz ein geringes Absinken der Quecksilbersäule, bis sie dann zu steigen beginnt. Erklären Sie diese Erscheinung.
- ⑥ Weshalb bleibt ein Heizkörper einer Warmwasserheizungsanlage kalt, wenn sich an einer Stelle eine Luftblase gebildet hat?

6 Mechanische Schwingungen und Wellen

6.1 Schwingungen

6.1.1 Entstehung von Schwingungen und ihre Eigenschaften

VERSUCH 1

Ein Gewichtsstück ist an einer Schraubenfeder aufgehängt. Zieht man es aus der Ruhelage eine Strecke nach unten und gibt es dort frei, so führt es eine vertikale Schwingung aus.

VERSUCH 2

Einen ähnlichen Vorgang beobachtet man an einer Stahlkugel, die an einem Faden als Pendel aufgehängt ist. Bewegt man sie aus der Ruhelage nach der Seite und lässt sie los, so führt sie eine seitliche Pendelschwingung aus.

Bei beiden Experimenten klingt die Schwingung mit der Zeit ab. Diese **Dämpfung** wird zunächst vernachlässigt.

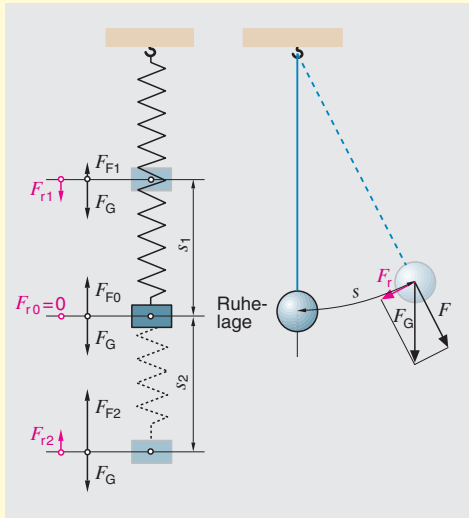


Abb. 1 Rücktreibende Kraft bei einer Feder- und Pendelbewegung

Auswertung

Beide Versuche lassen eine Voraussetzung erkennen, die für das Entstehen einer Schwingung erfüllt sein muss. Beim ersten Versuch (Abb. 1) ist in der Ruhelage die Feder so weit gedehnt, dass die nach oben ziehende Federkraft F_F und die Gewichtskraft F_G im Gleichgewicht stehen $F_{F0} - F_G = 0$. Beim Dehnen der Feder wächst die Federkraft und es entsteht

die resultierende Kraft $F_{r2} = F_{F2} - F_G$ nach oben. Oberhalb der Ruhelage ist dagegen die Federkraft kleiner als in der Ruhelage und wir haben eine nach unten gerichtete, negative Resultierende $F_{r1} = F_{F1} - F_G < 0$. Das Gewichtsstück m steht also in beiden Fällen unter dem Einfluss einer zur Ruhelage hin gerichteten **rücktreibenden Kraft** F_r .

Auch bei der Stahlkugel zeigt eine Kräftezerlegung der Gewichtskraft, dass die Komponente F mit der Spannkraft des Fadens im Gleichgewicht steht und die Komponente F_r immer zur Ruhelage hin gerichtet ist. Auch die Stahlkugel steht also unter dem Einfluss einer rücktreibenden Kraft.

Die rücktreibende Kraft beschleunigt den Körper zur Ruhelage, sodass er dort seine größte Geschwindigkeit erreicht. Infolge seiner Trägheit kann er dort nicht zum Stillstand kommen und bewegt sich über die Ruhelage hinaus. Weil er sich dann entgegen der rücktreibenden Kraft bewegt, nimmt seine Geschwindigkeit ab, bis er seine Bewegungsrichtung umkehrt und sich wieder in Richtung Ruhelage bewegt. Diese Vorgänge wiederholen sich periodisch und es entsteht eine **Schwingung**.

Ergebnis

Jeder träge Körper, der unter Einfluss einer rücktreibenden Kraft steht, kann zu Schwingungen angeregt werden.

Der Bewegungsablauf ist davon abhängig, nach welcher Gesetzmäßigkeit sich die rücktreibende Kraft mit der Entfernung von der Ruhelage ändert. Befolgt sie, wie z. B. bei einer Feder, das Hooke'sche Gesetz (Abschnitt 1.5.11), so ist die Kraft F_r proportional zur **Elongation** oder **Auslenkung** s . Da die rücktreibende Kraft F_r der Auslenkung s stets entgegengesetzt gerichtet ist, gilt das Kraftgesetz:

$$F_r = -D \cdot s$$

Die hier eingeführte Größe D entspricht bei einer Feder der schon in Abschnitt 1.5.11 eingeführten **Richtgröße**; bei Schwingungen wird diese Bezeichnung allgemein für den Quotienten $D = -F_r/s$ verwendet. Eine bei diesem Kraftgesetz entstehende Schwingung nennt man eine **harmonische Schwingung**.

6.1.1 Entstehung von Schwingungen und ihre Eigenschaften

Die Dauer einer vollen Auf- und Abwärtsbewegung bzw. einer vollständigen Hin- und Herbewegung ist die **Schwingungs-** oder **Periodendauer**. Sie ändert sich mit der Masse des schwingenden Gewichtsstückes und beim ersten Versuch auch mit der Richtgröße der Feder. Die folgenden Versuche untersuchen diesen Zusammenhang etwas genauer.

VERSUCH 3

An eine Feder mit der Richtgröße $D=0,08\text{ N/cm}=8\text{ N/m}$ werden nacheinander verschiedene Gewichtsstücke mit der Masse m angehängt. Zur Erhöhung der Genauigkeit messen wir mit einer Stoppuhr die Zeitdauer von zehn Schwingungen und berechnen daraus die Schwingungsdauer.

Auswertung

Aus der nachstehenden Wertetabelle erkennt man das Anwachsen der Schwingungsdauer T bei zunehmender Masse m . Da T sich jedoch erst verdoppelt, wenn eine vierfache Masse angehängt wird, bilden wir nicht den Quotienten T/m , sondern T/\sqrt{m} und tragen den erhaltenen Zahlenwert in die fünfte Spalte ein. (Sechste Spalte siehe unten unter Zusammenfassung.)

| Wertetabelle | | | | | |
|--------------|-------|--------|--------|--------------|-----------------------|
| m | D | $10 T$ | T | T/\sqrt{m} | $T\sqrt{\frac{D}{m}}$ |
| 0,1 kg | 8 N/m | 7,1 s | 0,71 s | 2,25 | 6,35 |
| 0,2 kg | 8 N/m | 9,9 s | 0,99 s | 2,21 | 6,26 |
| 0,4 kg | 8 N/m | 14,1 s | 1,41 s | 2,23 | 6,31 |

Ergebnis

Die Schwingungsdauer ist proportional zu \sqrt{m} , also $T \sim \sqrt{m}$

VERSUCH 4

Bei der gleichen Versuchsanordnung lassen wir jetzt das angehängte Gewichtsstück mit der Masse $m=0,2\text{ kg}$ unverändert und benutzen Federn mit unterschiedlichen Richtgrößen D . Auch bei den hier entstehenden Schwingungen messen wir die Periodendauer.

Anwendung

Bei diesem Versuch nimmt die Schwingungsdauer mit zunehmender Richtgröße ab und zwar halbiert sich die Schwingungsdauer bei einer viermal größeren Richtgröße. Deshalb tragen wir in die fünfte Spalte $T \cdot \sqrt{D}$ ein. (Sechste Spalte siehe unter Zusammenfassung.)

| Wertetabelle | | | | | |
|--------------|--------|--------|--------|--------------|-----------------------|
| m | D | $10 T$ | T | T/\sqrt{D} | $T\sqrt{\frac{D}{m}}$ |
| 0,2 kg | 4 N/m | 14,2 s | 1,42 s | 2,84 | 6,35 |
| 0,2 kg | 8 N/m | 9,9 s | 0,99 s | 2,80 | 6,26 |
| 0,2 kg | 16 N/m | 7,1 s | 0,71 s | 2,84 | 6,35 |

Ergebnis

Die Schwingungsdauer ist umgekehrt proportional zu \sqrt{D} , also $T \sim 1/\sqrt{D}$

VERSUCHE 3 UND 4

Zusammenfassung

Die beiden Ergebnisse $T \sim \sqrt{m}$ und $T \sim 1/\sqrt{D}$ lassen sich zusammenfassen: $T \sim \sqrt{\frac{m}{D}}$

Zur Prüfung tragen wir bei beiden Versuchen in einer sechsten Spalte den Wert des Ausdrucks $T/\sqrt{\frac{m}{D}} = T \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$ ein.

Dieser Ausdruck hat die Einheit: $\left[T \sqrt{\frac{D}{m}} \right] = \text{s} \sqrt{\frac{\text{N/m}}{\text{kg}}} = \text{s} \sqrt{\frac{\text{kg s}^{-2}}{\text{kg}}} = 1$; $T \sqrt{\frac{D}{m}}$ ist also eine reine Zahl.

Ergebnis

Der Ausdruck $T \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$ hat bei allen Teilversuchen nahezu den Wert 6,3.

Es ergibt sich demnach: $T \sqrt{\frac{D}{m}} \approx 6,3$ $T \approx 6,3 \sqrt{\frac{m}{D}}$

Den genauen Wert des bei der Wurzel stehenden Faktors findet man theoretisch aus dem Vergleich einer Schwingung mit einer gleichförmigen Kreisbewegung:

VERSUCH 5

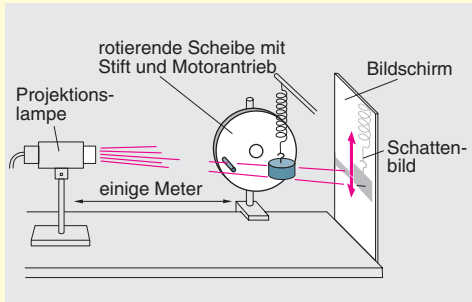


Abb. 2 Schwingung und Kreisbewegung

Ein Experimentiermotor trägt eine Scheibe, an der ein Stift befestigt ist (Abb. 2). Daneben ist eine Masse an einer Schraubenfeder aufgehängt. Man reguliert nun die Drehfrequenz des Motors so, dass die Umlaufzeit genau der Periodendauer der Masse entspricht, und regt diese so zu Schwingungen an, dass bei der Projektion auf den Bildschirm der umlaufende Stift und die schwingende Masse sich um die gleiche Strecke auf und ab bewegen. Dann stimmen die beiden Bewegungen nicht nur in der Periode und ihrer größten Auslenkung überein, sondern sie bewegen sich während des ganzen Ablaufs auf dem Bildschirm exakt nebeneinander.

Ergebnis

Eine harmonische Schwingung kann man als Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung auffassen.

Dieses Ergebnis folgt auch aus dem Vergleich der Kraftgesetze von Schwingung und Drehbewegung. Für die schwingende Masse gilt das Hooke'sche Gesetz $F_r = -D \cdot s$. Die gleichförmige Kreisbewegung ist eine Folge der konstanten Zentripetalkraft $F_p = m \cdot r \cdot \omega^2$ (Abschnitt 1.9.3). Für die Projektion der Kreisbewegung auf die s -Achse der Abb.3 benötigt man auch nur die s -Komponente der Zentripetalkraft. Man erhält sie durch Multiplikation mit dem $\sin \varphi = s/r$. Da die Kraftkomponente und s stets entgegengerichtet sind, ist ein negatives Vorzeichen zu berücksichtigen.

Man erhält dann: $F_s = -m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot s/r = -m \cdot \omega^2 \cdot s$. Sowohl F_r wie auch F_s sind also proportional zur Entfernung s von der Ruhelage, wobei der Richtgröße D das konstante Produkt $m \cdot \omega^2$ entspricht:

$$D = m \cdot \omega^2 \quad \text{oder} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Da bei der Gültigkeit des gleichen Kraftgesetzes auch die gleiche Bewegung entstehen muss, ergibt sich hieraus, dass eine harmonische Schwingung als Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung betrachtet werden kann.

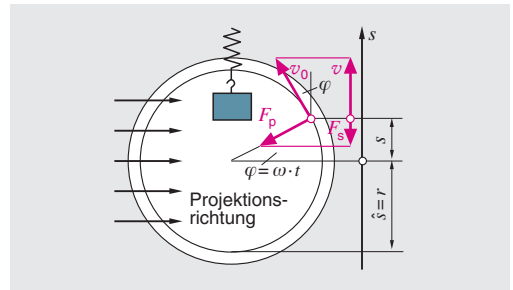


Abb. 3 Schwingung als Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung

Die Projektion der Kreisbewegung erhält man nach Abb.3, indem man den Radius r mit dem Sinus des mit der Winkelgeschwindigkeit ω wachsenden Winkels $\varphi = \omega \cdot t$ multipliziert: $s = r \cdot \sin \varphi = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

Diese Gleichung gilt auch für eine Schwingung, bei der zum Zeitpunkt $t=0$ die Auslenkung $s=0$ ist. Beim Federpendel wird eine solche Schwingung dadurch angeregt, dass man der Masse in der Ruhelage einen Stoß nach oben versetzt. Der Kreisradius r stellt für die Schwingung den größten Wert der Auslenkung s dar, den man als **Amplitude** oder **Schwingungsweite** \hat{s} (lies s-Dach) bezeichnet. Der Winkel $\varphi = \omega \cdot t$ wächst bei der Kreisbewegung gleichmäßig mit der Zeit; er wird **Phasenwinkel** genannt. Damit erhält man die Gleichung für die Auslenkung der Schwingung mit den Anfangsbedingungen $s=0$ und $v>0$:

Weg-Zeit-Gesetz einer harmonischen Schwingung

$$s = \hat{s} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Die Umlaufgeschwindigkeit bei der Kreisbewegung hat den konstanten Wert $v = r \cdot \omega$ (Abschnitt 1.9.3). Da sie tangential gerichtet ist, erhält man ihre Projektion auf die x -Achse durch Multiplika-

6.1.1 Entstehung von Schwingungen und ihre Eigenschaften

tion mit $\cos \varphi = \cos(\omega \cdot t)$; ersetzt man auch noch r durch s , so erhält man:

Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz einer harmonischen Schwingung

$$v = \hat{s} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) = \hat{v} \cos(\omega \cdot t)$$

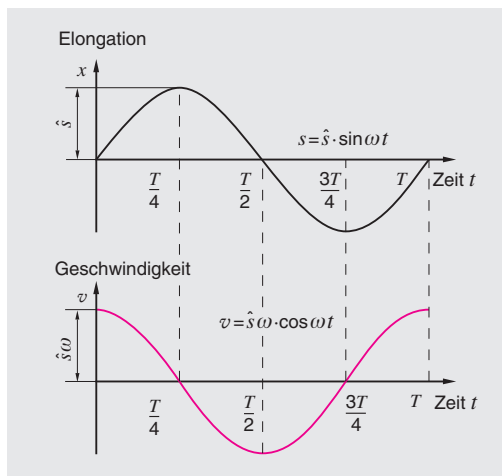


Abb. 4 Ablauf einer harmonischen Schwingung

Abb. 4 zeigt die Zeitabhängigkeit der Elongation und der Geschwindigkeit in grafischer Darstellung. Man erkennt den periodischen Wechsel der beiden Größen nach einer Sinus- bzw. Cosinusfunktion und die Tatsache, dass die Geschwindigkeit beim Durchgang durch die Ruhelage am größten ist. Die Dauer einer vollen Hin- und Herbewegung ist die **Schwingungs-** oder **Periodendauer** T . Sie entspricht der Zeit für einen Umlauf bei der Kreisbewegung. Ihr reziproker Wert ist die **Frequenz** f .

$$f = \frac{1}{T}$$

$$[f] = \frac{1}{s} = \text{Hz}$$

Für die SI-Einheit der Frequenz $[f] = s^{-1}$ wird bei Schwingungen meist die Bezeichnung **Hertz** (Hz) verwendet: $1 \text{ Hz} = 1 s^{-1}$. Der Zahlenwert von f gibt an, wie oft T in 1 s enthalten ist. f ist also die Anzahl der Schwingungen in 1 s und entspricht der Drehfrequenz n bei der Kreisbewegung (Abschnitt 1.4.3).

Weil bei der Kreisbewegung der Umfang $2r \cdot \pi$ mit der Geschwindigkeit $r \cdot \omega$ in der Zeit T zurückgelegt wird, erhält man noch folgende Beziehungen:

$$T = \frac{2r \cdot \pi}{r \cdot \omega} = \frac{2\pi}{\omega} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Setzt man $\omega = 2\pi/T$ in die in Versuch 5 abgeleitete Beziehung $D = m \cdot \omega^2$ ein, so erhält man:

Schwingungsdauer einer harmonischen

$$\text{Schwingung } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Die Schwingungsdauer einer harmonischen Schwingung ist also proportional zur Wurzel aus der Masse und umgekehrt proportional zur Wurzel aus der Richtgröße; sie ist dagegen unabhängig von der Amplitude der Schwingungen.

Während der Schwingung wandelt sich mit dem periodischen Wechsel des Ortes und der Geschwindigkeit auch kinetische Energie in potentielle um und umgekehrt. Beim Durchgang durch die Ruhelage hat die potentielle Energie ihren geringsten und die kinetische ihren größten Wert. Mit steigender Elongation muss die rücktreibende Kraft überwunden werden; folglich nimmt die potentielle Energie zu. An den Umkehrpunkten hat sie ihr Maximum, die kinetische Energie ist Null. Mit der in Abschnitt 1.7.2 angegebenen Formel $W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D s^2$ sowie $s = \hat{s} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ und $v = \hat{v} \cos(\omega \cdot t)$ gilt allgemein:

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D \cdot s^2 = \frac{1}{2} D \cdot \hat{s}^2 \sin^2(\omega \cdot t)$$

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \hat{s}^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} m \hat{v}^2 \cos^2(\omega \cdot t)$$

Für die Summe beider Energiearten erhält man unter Berücksichtigung von $D = m \cdot \omega^2$:

$$\begin{aligned} W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} D \cdot \hat{s}^2 \sin^2(\omega \cdot t) + \\ &+ \frac{1}{2} m \cdot \hat{s}^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) = \\ &= \frac{1}{2} D \cdot \hat{s}^2 [\sin^2(\omega \cdot t) + \cos^2(\omega \cdot t)] = \\ &= \frac{1}{2} D \cdot \hat{s}^2 = \frac{1}{2} m \cdot \hat{v}^2 \end{aligned}$$

Die Summe beider Energiearten ist also während der ganzen Schwingung konstant; es tritt nur eine gegenseitige Umwandlung auf. Dieses Ergebnis bestätigt auch hier die Gültigkeit des Satzes von der Erhaltung der Energie.

Eine mechanische Schwingung stellt einen periodischen Wechsel zwischen potentieller und kinetischer Energie dar.

Die gefundenen Formeln gelten für alle Schwingungen von elastischen Körpern, wenn m die schwingende Masse und D die Richtgröße, nämlich der konstante Quotient $D = -F_r/s$ aus der rücktreibenden Kraft und der Elongation ist.

BEISPIEL

Eine Schraubenfeder verlängert sich beim Anhängen der Masse 3,6 kg um 1 m. Die Masse befindet sich zunächst in der Ruhelage $s = 0$ und wird durch einen Stoß nach oben zu Längsschwingungen angeregt. Welche Periodendauer hat die Schwingung, zu der die Masse angeregt werden kann? Welche Elongation und welche Geschwindigkeit besitzt sie 0,1 s nach dem Durchgang durch die Ruhelage, wenn ihre Schwingung eine Amplitude $\hat{s} = 40$ cm besitzt?

Die Richtgröße D ist die Federkonstante:

$$D = \frac{F}{s} = \frac{3,6 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{1 \text{ m}} = 35,3 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{3,6 \text{ kg}}{35,3 \text{ kg/s}^2}} = 2 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 3,14 \text{ s}^{-1}$$

Phasenwinkel nach 0,1 s:

$$\varphi = \omega \cdot t = 3,14 \text{ s}^{-1} \cdot 0,1 \text{ s} = 0,314 =$$

$$= 0,314 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 18^\circ$$

$$s = \hat{s} \cdot \sin(\omega \cdot t) = 40 \text{ cm} \cdot \sin 18^\circ = \underline{12,36 \text{ cm}}$$

$$v = \hat{s} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) = 40 \text{ cm} \cdot 3,14 \text{ s}^{-1} \cdot \cos 18^\circ = \underline{119,5 \text{ cm/s}}$$

AUFGABEN

① Die Masse $m = 2$ kg, die sich zwischen einer Druckfeder ($D_1 = 0,62 \text{ N/cm}$) und einer Zugfeder ($D_2 = 0,18 \text{ N/cm}$) befindet, wird in Schwingungen versetzt. Berechnen Sie die Periodendauer.

② Welche Richtgröße hat eine Feder, wenn eine an ihr aufgehängte Masse $m = 1,6$ kg eine Schwingung mit der Schwingungsdauer 0,8 s ausführt? Wie groß ist die rücktreibende Kraft im Umkehrpunkt bei einer Amplitude von 5 cm?

③ Nennen Sie die Voraussetzungen und Eigenschaften einer harmonischen Schwingung.

④ Warum können alle elastischen Körper harmonische Schwingungen ausführen?

6.1.2 Pendel

Die einfachste Form eines **Pendels** ist eine Stahlkugel an einem dünnen Faden. Sie ist nahezu die Verwirklichung eines **mathematischen Pendels** aus einem schweren Massepunkt an einem masselosen Faden. Die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Masse, der Amplitude und der Länge des Pendels erkennt man aus Versuchen.

VERSUCH 1



Abb. 1 Schwingungsdauer und Masse bei einem Fadenpendel

Eine Stahl- und eine gleich große Aluminiumkugel werden an gleich langen Fäden als Pendel aufgehängt (Abb. 1). Lässt man beide Kugeln außerhalb der Ruhelage frei, so entsteht eine Schwingung. Dabei zeigt sich aber kein Unterschied in der Schwingungsdauer, obwohl beide Kugeln stark unterschiedliche Massen besitzen.

Ergebnis

Die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels ist unabhängig von seiner Masse.